ch­¬ng 4. giíi h¹n

**BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**

**A. BÀI HỌC**

I. D·y sè cã giíi h¹n 0

## ®Þnh nghÜa d·y sè cã giíi h¹n 0

***§Þnh nghÜa***: *Ta nãi* ***d·y sè*** (un) ***cã giíi h¹n lµ*** 0 (*hay cã giíi h¹n* 0) *nÕu mäi sè h¹ng cña d·y sè ®Òu cã gi¸ trÞ tuyÖt ®èi nhá h¬n mét sè d­¬ng nhá tuú ý cho tr­íc kÓ tõ mét sè h¹ng nµo ®ã trë ®i*.

Khi ®ã, ta viÕt:

 = 0, viÕt t¾t lµ lim(un) = 0 hoÆc limun = 0 hoÆc un → 0.

***NhËn xÐt***:

1. D·y sè (un) cã giíi h¹n 0 khi vµ chØ khi d·y sè (⏐un⏐) cã giíi h¹n 0.
2. D·y sè kh«ng ®æi (un) víi un = 0 cã giíi h¹n 0.

## mét sè d·y sè cã giíi h¹n 0 th­êng gÆp

Tõ ®Þnh nghÜa, ta cã c¸c kÕt qu¶:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. lim = 0. | 1. lim  = 0. | 1. lim  = 0. |

***§Þnh lÝ 1***: Cho hai d·y sè (un) vµ (vn). NÕu ⏐un⏐ ≤ vn víi mäi n vµ limvn = 0 th× limun = 0.

***§Þnh lÝ 2***: NÕu ⏐q⏐ < 1 th× limqn = 0.

II. D·y sè cã giíi h¹n h÷u h¹n

## ®Þnh nghÜa d·y sè cã giíi h¹n

***§Þnh nghÜa***: *Ta nãi* ***d·y sè*** (un) ***cã giíi h¹n lµ sè thùc*** L *nÕu*  = 0.

Khi ®ã, ta viÕt:

** = L, viÕt t¾t lµ lim(un) = L hoÆc limun = L hoÆc un → L.

## mét sè ®Þnh lÝ

***§Þnh lÝ 1***: Gi¶ sö limun = L. Khi ®ã:

1. lim⏐un⏐ = ⏐L⏐ vµ lim = .
2. NÕu un ≥ 0 víi mäi n th× L ≥ 0 vµ lim  = .

***§Þnh lÝ 2***: Gi¶ sö limun = L, limvn = M vµ c lµ mét h»ng sè. Khi ®ã:

1. C¸c d·y sè (un + vn), (un − vn), (un.vn) vµ (cun) cã giíi h¹n vµ:
   * lim(un + vn) = L + M.
   * lim(un − vn) = L − M.
   * lim(un.vn) = LM.
   * lim(cun) = cL.
2. NÕu M ≠ 0 th× d·y sè  cã giíi h¹n vµ lim = .

## tæng cña cÊp sè nh©n lïi v« h¹n

Víi cÊp sè nh©n (un) cã c«ng béi q tho¶ m·n ⏐q⏐ < 1 th×:

S = u1 + u2 + … = .

III. D·y sè cã giíi h¹n v« cùc

## d·y sè cíi giíi h¹n +∞

***§Þnh nghÜa***: *Ta nãi* ***d·y sè*** (un) ***cã giíi h¹n lµ*** +∞ *nÕu mäi sè h¹ng cña d·y sè ®Òu lín h¬n mét sè d­¬ng lín tuú ý cho tr­íc kÓ tõ mét sè h¹ng nµo ®ã trë ®i*.

Khi ®ã, ta viÕt:

** = +∞, viÕt t¾t lµ lim(un) = +∞ hoÆc limun = +∞ hoÆc un → +∞.

Tõ ®Þnh nghÜa, ta cã c¸c kÕt qu¶:

1. lim n = +∞.
2. lim  = +∞.
3. lim = +∞.

## d·y sè cã giíi h¹n −∞

***§Þnh nghÜa***: *Ta nãi* ***d·y sè*** (un) ***cã giíi h¹n lµ*** −∞ *nÕu mäi sè h¹ng cña d·y sè ®Òu nhá h¬n mét sè ©m tuú ý cho tr­íc kÓ tõ mét sè h¹ng nµo ®ã trë ®i*.

Khi ®ã, ta viÕt:

** = −∞, viÕt t¾t lµ lim(un) = −∞ hoÆc limun = −∞ hoÆc un → −∞.

***NhËn xÐt***: NÕu limun = −∞ th× lim(−un) = +∞.

**☞ *Chó ý***:

1. C¸c d·y sè cã giíi h¹n +∞ vµ −∞ ®­îc gäi chung lµ c¸c d·y sè cã giíi h¹n v« cùc hay dÇn ®Õn v« cùc.
2. D·y sè cã giíi h¹n lµ sè thùc L ®­îc gäi lµ d·y sè cã giíi h¹n h÷u h¹n.

## mét vµi quy t¾c t×m giíi h¹n v« cùc

***Quy t¾c 1***: NÕu limun = ±∞ vµ limvn = ±∞ th× lim(un.vn) ®­îc cho trong b¶ng sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| limun | limvn | lim(un.vn) |
| +∞ | +∞ | +∞ |
| +∞ | −∞ | −∞ |
| −∞ | +∞ | −∞ |
| −∞ | −∞ | +∞ |

***Quy t¾c 2***: NÕu limun = ±∞ vµ limvn = L ≠ 0 th× lim(un.vn) ®­îc cho trong b¶ng sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| limun | DÊu cña L | lim(un.vn) |
| +∞ | + | +∞ |
| +∞ | − | −∞ |
| −∞ | + | −∞ |
| −∞ | − | +∞ |

***Quy t¾c 3***: NÕu limun = L ≠ 0, limvn = 0 vµ vn ≠ 0 víi mäi n th× lim  ®­îc cho trong b¶ng sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| DÊu cña L | DÊu cña vn | lim |
| + | + | +∞ |
| + | − | −∞ |
| − | + | −∞ |
| − | − | +∞ |

## Mét sè kÕt qu¶

1. lim = +∞ vµ lim = 0, víi q > 1.

*Më réng*: Ta cã lim = +∞ vµ lim, víi q > 1 vµ k lµ mét sè nguyªn d­¬ng.

1. Cho hai d·y sè (un) vµ (vn).
   * NÕu un ≤ vn víi mäi n vµ lim un = +∞ th× lim vn = +∞.
   * NÕu lim un = L ∈ **R** vµ lim⏐vn⏐ = +∞ th× lim  = 0.
   * NÕu lim un = +∞ (hoÆc −∞) vµ lim vn = L ∈ **R** th× lim (un + vn) = +∞ (hoÆc −∞).

B. Ph­¬ng ph¸p gi¶i c¸c d¹ng to¸n liªn quan

1. **D·y sè cã giíi h¹n 0**
2. *Chøng minh r»ng c¸c d·y sè* (uu) *sau ®©y cã giíi h¹n* 0:

a. un = . b. un = .

**✍** *Gi¶i*

1. Ta cã:

 <  vµ lim = 0,

tõ ®ã, suy ra ®iÒu cÇn chøng minh.

1. Ta cã:

 <  <  vµ lim = 0,

tõ ®ã, suy ra ®iÒu cÇn chøng minh.

**☞ *NhËn xÐt***: Nh­ vËy, ®Ó chøng minh c¸c dÉy sè trªn cã giíi h¹n 0 chóng ta ®· sö dông phÐp ®¸nh gi¸ ®Ó kh¼ng ®Þnh un <  vµ kÕt qu¶ lim = 0.

1. *Chøng minh r»ng d·y sè* (uu) *víi sè h¹ng tæng qu¸*t un =  *cã giíi h¹n* 0.

**✍** *Gi¶i*

Ta cã:

 =  =  <  < 

vµ lim = 0,

tõ ®ã, suy ra ®iÒu cÇn chøng minh.

**☞ *NhËn xÐt***: Nh­ vËy, ®Ó chøng minh c¸c dÉy sè trªn cã giíi h¹n 0 chóng ta ®· sö dông phÐp ®¸nh gi¸ ®Ó kh¼ng ®Þnh un <  vµ lim = 0.

1. *Chøng minh r»ng d·y sè* (uu*) víi sè h¹ng tæng qu¸t* un =  *cã giíi h¹n* 0.

**✍** *Gi¶i*

Ta cã:

⏐⏐ <  =  vµ lim = 0,

tõ ®ã, suy ra ®iÒu cÇn chøng minh.

**☞ *NhËn xÐt***: Nh­ vËy, ®Ó chøng minh c¸c dÉy sè trªn cã giíi h¹n 0 chóng ta ®· sö dông phÐp ®¸nh gi¸ ®Ó kh¼ng ®Þnh un < qn vµ limqn = 0 víi ⏐q⏐ < 1.

1. **Sö dông ®Þnh nghÜa chøng minh r»ng lim un = L**

*Ph­¬ng ph¸p ¸p dông*

Ta ®i chøng minh lim(un − L) = 0.

1. *Chøng minh r»ng*:

a. lim = . b. lim = 1.

**✍** *Gi¶i*

1. §Æt un = , ta cã nhËn xÐt:

lim (un − ) = lim( − ) = lim  = 0,

tõ ®ã suy ra limun = .

1. §Æt un = , ta cã nhËn xÐt:

lim ( − 1) = lim  = 0,

tõ ®ã suy ra limun = 1.

1. *Chøng minh r»ng*:

lim = 2.

**✍** *Gi¶i*

§Æt un = , ta cã nhËn xÐt:

lim (un − 2) = lim = 0,

tõ ®ã suy ra limun = 2.

1. **TÝnh giíi h¹n cña d·y sè b»ng c¸c ®Þnh lÝ vÒ giíi h¹n**

*Ph­¬ng ph¸p ¸p dông*

§­a d·y sè cÇn t×m giíi h¹n vÒ d¹ng tæng hiÖu, tÝch, th­¬ng cña nh÷ng d·y sè mµ ta ®· biÕt giíi h¹n.

Ta cã c¸c kÕt qu¶ sau:

* 1. limc = c, víi c lµ h»ng sè.
  2. KÕt qu¶ trong ®Þnh lÝ 1.
  3. KÕt qu¶ trong ®Þnh lÝ 2.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

a. . b. .

**✍** *Gi¶i*

* + 1. Ta cã:

 =  = 

* + 1. Ta cã:

 =  =  =  = 0.

**☞ *NhËn xÐt***: Nh­ vËy, ®Ó tÝnh c¸c giíi h¹n trªn chóng ta ®· thùc hiÖn phÐp chia c¶ tö vµ mÉu cho bËc cao nhÊt cña n vµ sö dông kÕt qu¶ lim = 0 víi k > 0.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

a. . b. .

**✍** *Gi¶i*

* + - 1. Chia c¶ tö vµ mÉu cho n, ta ®­îc:

= = 1.

* + - 1. Chia c¶ tö vµ mÉu cho n2, ta ®­îc:

 =  = 2.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

a. lim. b. lim.

**✍** *Gi¶i*

1. Ta cã:

lim = lim =  = 2, v× lim = 0.

1. Ta cã:

lim = lim =  = 2, v× lim = 0.

**☞ *NhËn xÐt***: Nh­ vËy, ®Ó tÝnh c¸c giíi h¹n trªn chóng ta ®· thùc phÐp t¸ch thµnh c¸c giíi h¹n nhá.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

a. . b. .

**✍** *Gi¶i*

* + 1. Ta biÕn ®æi:

 =  =  = − 1.

* + 1. Ta biÕn ®æi:

==== − 4.

**☞ *NhËn xÐt***: Nh­ vËy, ®Ó tÝnh c¸c giíi h¹n trªn chóng ta ®· thùc hiÖn phÐp chia c¶ tö vµ mÉu cho c¬ sè cao nhÊt vµ sö dông kÕt qu¶ limqn = 0 víi ⎢q⎢< 1.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

a. . b. .

c. lim. d. lim

**✍** *Gi¶i*

1. Ta thùc hiÖn phÐp nh©n liªn hîp:

 =  =  = 0.

1. Ta thùc hiÖn phÐp nh©n liªn hîp:

 =  = =

1. Ta thùc hiÖn phÐp nh©n liªn hîp:

lim= lim= lim= 0.

1. Ta thùc hiÖn phÐp nh©n liªn hîp:

lim = lim

= lim = .

**☞ *NhËn xÐt***: Nh­ vËy, ®Ó tÝnh c¸c giíi h¹n trªn tr­íc tiªn chóng ta cÇn sö dông phÐp nh©n liªn hîp ®Ó khö d¹ng ∞ **−** ∞ vµ .

1. *TÝnh giíi h¹n* .

**✍** *Gi¶i*

Ta thùc hiÖn phÐp nh©n liªn hîp:

=

= =  = 0.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

L = , víi ⏐a⏐, ⏐b⏐ < 1.

**✍** *Gi¶i*

Ta biÕn ®æi:

L = = 

=  = .

**☞ *NhËn xÐt***: Nh­ vËy, ®Ó tÝnh giíi h¹n trªn chóng ta cÇn sö dông kiÕn thøc vÒ khai triÓn nhÞ thøc Niut¬n.

1. **TÝnh tæng cña cÊp sè nh©n lïi v« h¹n**

*Ph­¬ng ph¸p ¸p dông*

Sö dông c«ng thøc:

S = u1 + u2 + … = , víi ⏐q⏐ < 1.

1. *TÝnh tæng* *c¸c tæng sau*:
   1. S = 1 +  +  + … b. S = 1 + 

**✍** *Gi¶i*

* + 1. XÐt cÊp sè nh©n (un) cã u1 = 1 vµ c«ng béi q =  < 1, ta ®­îc:

S =  =  = 2.

* + 1. D·y sè −1, , ...,  lµ mét cÊp sè nh©n cã u1 = −1 vµ c«ng béi q = −.

Tõ ®ã, suy ra:

limS =  =  = −.

1. *BiÓu diÔn c¸c sè thËp ph©n v« h¹n tuÇn hoµn sau d­íi d¹ng ph©n sè*:

a. 0,444... b. 0,2121.... c. 0,32111....

**✍** *Gi¶i*

* 1. NhËn xÐt r»ng:

0,444... = 0,4 + 0,04 + 0,004... =  +  +  + ...

trong ®ã, c¸c sè , , . ... lµ mét cÊp sè nh©n lïi v« h¹n cã u1 =  vµ c«ng béi q = .

Tõ ®ã, suy ra:

0,444... =  =  = .

* 1. NhËn xÐt r»ng:

0,2121... = 0,21 + 0,0021 + ... =  +  + ...

trong ®ã, c¸c sè , ,. ... lµ mét cÊp sè nh©n lïi v« h¹n cã u1 =  vµ c«ng béi q = .

Tõ ®ã, suy ra:

0,2121... =  =  = .

* 1. NhËn xÐt r»ng:

0,32111... = 0,32 + 0,001 + 0,0001... = 0,32 +  +  + ...

trong ®ã, c¸c sè , , ... lµ mét cÊp sè nh©n lïi v« h¹n cã u1 =  vµ q = .

Tõ ®ã, suy ra:

0,32111... = 0,32 +  =  +  = .

1. **D·y sè cã giíi h¹n v« cùc**
2. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

a. lim(n2 − n + 1). b. lim(−n2 + n + 1).

**✍** *Gi¶i*

1. Ta cã:

lim(n2 − n + 1) = lim[n2(1 −  + ) = +∞.

1. Ta cã:

lim(−n2 + n + 1) = lim[−n2(1 −  − ) = −∞.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

a. lim. b. lim.

**✍** *Gi¶i*

1. Ta cã:

lim = lim = +∞.

1. Ta cã:

lim = lim = −∞.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:
   1. . b. lim.

c. lim.

**✍** *Gi¶i*

* 1. Ta thùc hiÖn phÐp nh©n liªn hîp:

=== 

= ∞.

* 1. Ta cã:

lim = lim

= lim = +∞.

* 1. Ta cã:

lim = lim = +∞.

1. *TÝnh c¸c giíi h¹n sau*:

a. lim(2n + cosn). b. lim(n2 − 3sin2n + 5).

**✍** *Gi¶i*

* 1. Ta cã:

2n + cosn ≥ 2n − 1 vµ lim(2n − 1) = +∞

tõ ®ã, suy ra:

lim(2n + cosn) = +∞.

* 1. Ta cã:

n2 − 3sin2n + 5 ≥ n2 + 2 vµ lim(n2 + 2) = +∞

tõ ®ã, suy ra:

lim(n2 − 3sin2n + 5) = +∞.

1. *Chøng minh r»ng nÕu* q > 1 *th×* limqn = +∞.

*¸p dông t×m giíi h¹n cña c¸c d·y sè* (un) *víi*:

a. un = . b. un = 2n − 3n.

**✍** *Gi¶i*

Ta cã:

limqn = lim =  = +∞.

* 1. Ta cã:

limun = lim = lim = +∞.

* 1. Ta cã:

limun = lim(2n − 3n) = lim = −∞.

1. *Cho hai d·y sè* (un) , (vn) *víi* un =  *vµ* vn = .
2. *TÝnh* limun.
3. *Chøng minh r»ng* limvn = 0.

**✍** *Gi¶i*

* 1. Ta cã:

limun = lim = 0

* 1. Ta cã:

 ≤  vµ lim = 0,

tõ ®ã, suy ra ®iÒu cÇn chøng minh.